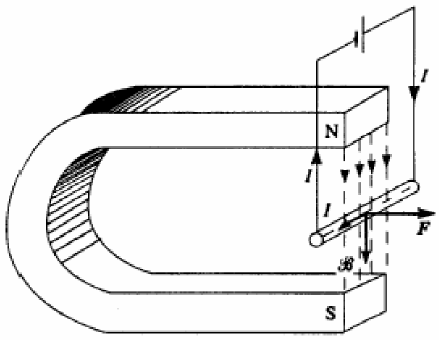
VI. Magnetostática

6.1 Força magnética e campo magnético

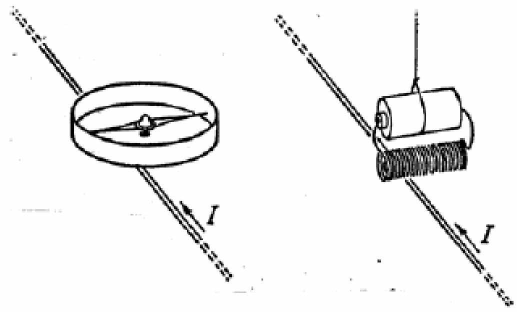
O magnetismo é conhecido desde os gregos antigos. O fenómeno foi inteiramente percebido, e a sua teoria foi desenvolvida no século XIX. As forças magnéticas existem entre (i) ímans permanentes e materiais magnéticos, (ii) ímans permanentes e condutores com corrente eléctrica, ou então (iii) entre duas correntes. Pelo contrário com a força eléctrica (a força de Coulomb), a força magnética só actua sobre cargas em movimento. Como a força magnética e exercida sobre um corpo distante (por exemplo, dois ímans separados por alguma distância), a interacção magnética ocorre através de um campo, chamado campo magnético. O campo magnético pode ser visualizado utilizando partículas pequenas de algum material magnético (por exemplo, limalha de ferro). Essas partículas alinham-se com o campo magnético, tal como os dipolos eléctricos alinham-se com o campo eléctrico. A força que um íman permanente exerce sobre um condutor com corrente eléctrica foi estudada por H. Ampère. Ele achou que esta força é proporcional à intensidade de corrente e ao comprimento do fio (ver figura ao lado). O sentido da força depende do sentido da corrente.



Ainda antes disso, H. Oersted descobriu que uma corrente também actua sobre um íman, fazendo rodar a agulha de uma bússola. Ele adivinhou que uma corrente eléctrica produz um campo magnético, tal como um íman permanente. A figura de baixo (**a**) mostra uma réplica da experiência de Oersted em que uma corrente actua sobre a agulha de uma bússola fazendo com que a agulha rode. Mais tarde, foi demonstrado que o mesmo tipo de acção existe por parte da corrente rectilínea sobre uma bobina atravessada por uma corrente eléctrica (figura **b**).

No entanto, foi Ampère que propôs a hipótese que o magnetismo de um íman permanente é devido a correntes microscópicas que existem neste material. Então, o campo magnético é criado por cargas em movimento e actua sobre cargas em movimento.

Das experiências de Ampère e de Oersted é óbvio que a força magnética actua sobre uma partícula carregada, que está em movimento, na direcção perpendicular à do seu movimento. Então, pode ser escrita como



a) **b)**

$$\vec{F}_M = \text{const} \cdot q\vec{v} \times \vec{B}$$

onde $\vec{B}$ é algum vector que caracteriza o campo magnético. Chama-se vector do campo magnético. A constante nesta relação é igual a 1 no sistema S.I. e é $\frac{1}{c}$ no CGS.

Assim, a força total que actua, sobre uma partícula carregada é

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{(CGS)} \tag{134}$$

onde c é a velocidade da luz (no S.I. não existe o factor $1/c$). A força (134) chama-se força de Lorentz.

A Eq. (134) serve de definição do vector de campo magnético (tal como a intensidade de campo eléctrico, $\vec{E}$, é a força eléctrica por unidade de carga). A dimensão desta grandeza coincide com a da intensidade de campo eléctrico apenas no sistema CGS.

Reparemos que o campo magnético entra na relação (134) da forma linear. Por isso, para o campo magnético, tal como para o campo eléctrico, verifica-se o **princípio de sobreposição**, ou seja, os campos produzidos por várias fontes somam-se (de maneira vectorial):

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i .$$

As unidades da intensidade de campo magnético são:

CGS: 1 Gauss (Gs) (é igual à unidade CGS de campo eléctrico)

S.I.: 1 Tesla (T) = $1\, kg\, s^{-1} C^{-1} = 1 \frac{N}{A \cdot m}$

O Gauss continua a ser a unidade mais usada para medir campos magnéticos, tanto pelos físicos quanto pelos engenheiros (verifique que $1T = 10^4\, Gs$). Apesar de coincidir, formalmente, com 1 e.s.u. de campo eléctrico, faz-se distinção entre estas duas unidades usando cada uma delas apenas para a respectiva grandeza. Para dar uma ideia das ordens de grandeza, o campo magnético terrestre, na vizinhança da superfície, é aproximadamente $0.5Gs$. No Universo, pelo menos, na nossa Galáxia, existe um campo magnético interstelar da ordem de $10^{-5}\, Gs$. O campo magnético produzido por electroímans pode atingir alguns kGs (quilogauss).

A força de Ampère

Como foi estabelecido experimentalmente por Ampère, a força exercida por um campo magnético, $\vec{B}$, sobre um condutor que transporta uma corrente eléctrica, I, (por exemplo, no caso mostrado na figura na página anterior) é

$$d\vec{F} = \left(\frac{1}{c}\right) I (d\vec{l} \times \vec{B}) \tag{135}$$

por elemento $d\vec{l}$ do condutor. O factor $\left(\frac{1}{c}\right)$ só existe no sistema CGS. A relação (135) pode ser facilmente deduzida da Eq.(134). O sentido desta força (sempre na direcção perpendicular aos vectores $d\vec{l}$ e $\vec{B}$) determina-se pela conhecida regra de parafuso de rosca direita. Para usar a Eq.(135) na prática, é conveniente expressar a intensidade de corrente em Amperes. Como $1A = 3 \cdot 10^9\, (\text{e.s.u. de carga})/s$,

$$d\vec{F}[\text{din}] = \left(\frac{1}{10}\right) I[\text{A}] (d\vec{l} \times \vec{B}) [\text{cm} \cdot \text{Gs}]$$

6.2 Lei de Biot-Savart e suas aplicações

O campo eléctrico é produzido por cargas em repouso. O campo de uma carga pontual é dada pela lei de Coulomb. O campo magnético é produzido por cargas em movimento, ou seja, por correntes eléctricas. O campo magnético criado por uma "corrente pontual" é dado pela lei de Biot-Savart, que é uma lei empírica (embora fosse mostrado posteriormente que é uma consequência da lei de Coulomb). O campo magnético produzido por um troço infinitesimal de um fio condutor, atravessado pela corrente I, é dado pela seguinte equação:

$$d\vec{B} = K_m \frac{I(d\vec{l} \times \vec{r})}{r^3}; \qquad \begin{array}{l} K_m = \dfrac{1}{c} \quad \text{(CGS)} \\ K_m = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \quad \text{(S.I.)} \end{array} \tag{136}$$

onde $\vec{r}$ é vector posição do ponto em que estamos a medir o campo, sendo a origem colocada no troço $d\vec{l}$ (que é pequeno, "pontual"), e K_m é uma constante, que é diferente no SI e CGS. No SI, costuma-se escreve-la na forma $K_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$ e chamar a μ_0 de permeabilidade magnética de vácuo. O seu valor numérico é $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$. È um valor exacto, já que é definido e não medido experimentalmente. Notemos ainda que

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}.$$

A lei de Biot-Savart (136) permite calcular o campo magnético criado por correntes que circulam em fios condutores de forma diferente.

Exemplos

1) Campo magnético produzido por uma corrente que circula num fio condutor, rectilíneo e uniforme

Escolhemos o eixo Z ao longo do fio, no sentido da corrente. Assim, o vector $d\vec{l}$ só tem componente z:

$$d\vec{l} = (0, 0, dz')$$

onde z' significa a coordenada de algum ponto do fio. O nosso objectivo é calcular o campo num ponto arbitrário (x, y, z) do espaço.

O produto externo que aparece na Eq.(136) é:

$$d\vec{l} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ dl_x & dl_y & dl_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$
$$= \vec{e}_y (x dz') - \vec{e}_x (y dz')$$

Então, o campo $d\vec{B}$, criado pelo troço dz' do fio (que está a uma distância z' da origem), num ponto (x, y, z), só tem componentes segundo os eixos X e Y. Estas componentes são dadas pelas fórmulas

$$dB_x = -K_m I \frac{y dz'}{\left[x^2 + y^2 + (z' - z)^2\right]^{3/2}};$$

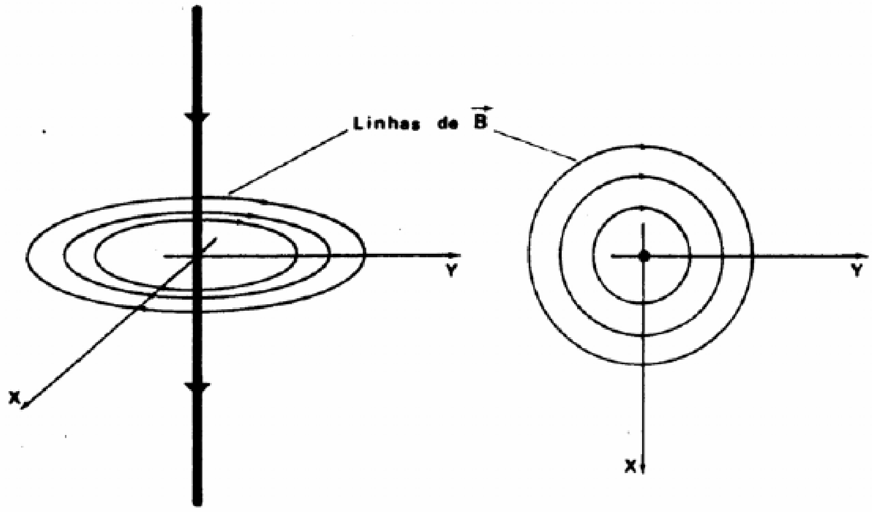
$$dB_y = K_m I \frac{x dz'}{\left[x^2 + y^2 + (z' - z)^2\right]^{3/2}}.$$

O campo total calcula-se integrando estas expressões em respeito a dz'. O integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{\left[x^2+y^2+(z-z')^2\right]^{3/2}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varsigma}{\left[x^2+y^2+\varsigma^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(t^2+1)^{3/2}} = \frac{2}{(x^2+y^2)}$$

onde usamos as variáveis $\varsigma = (z'-z)$ e $t = \dfrac{\varsigma}{\sqrt{x^2+y^2}}$.



Deste modo, temos o resultado:

$$\vec{B} = (B_x, B_y, 0)$$

$$B_x = -K_m \frac{2Iy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = -K_m \frac{2Iy}{R^2}$$

$$B_y = K_m \frac{2Ix}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = K_m \frac{2Ix}{R^2} \tag{137}$$

$(R^2 = x^2 + y^2)$. O módulo do campo é igual em qualquer ponto da circunferência de raio R:

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{Bx^2 + By^2} = K_m(2I)\frac{1}{R} \tag{137a}$$

No entanto, a sua direcção (no plano XOY) varia. Em qualquer ponto, é perpendicular ao vector posição:

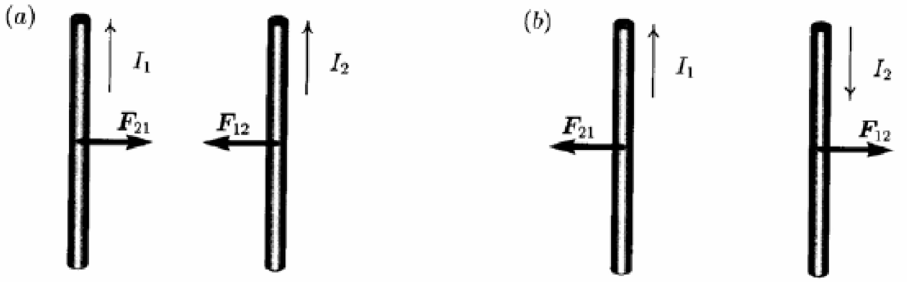
$$(\vec{B}\vec{r}) = (B_x x) + (B_y y) = 0$$

As linhas de campo (que são definidas de maneira igual ao caso do campo eléctrico) <u>são circunferências equidistantes, com o centro na origem</u> (ver a figura de cima).

Sabendo o campo (137), podemos calcular a força de interacção de duas correntes rectilíneas, paralelas e separadas de uma distância R_{12}. Utilizando a Eq.(135), a força que actua sobre um dos condutores (por unidade do seu comprimento) é:

$$f_{12} = K_m \frac{2I_1I_2}{R_{12}}. \qquad (*)$$

O sentido desta força indica a figura de baixo.



É através da expressão (*) que se defina as unidades no sistema S.I., antes de tudo, o Ampere. O Ampere é aquela intensidade de corrente que, quando esta corrente atravessa dois condutores infinitos, rectilíneos e paralelos, no vácuo, provoca uma força de interacção entre eles, igual a $2 \cdot 10^{-7}\,N$. O valor de $K_M = 1 \cdot 10^{-7}$ foi escolhido por razões de conveniência. È daqui que vem o misterioso coeficiente que aparece na lei de Coulomb escrita no S.I. e a própria unidade de carga ($1C$=$1A \cdot s$).

2) Campo magnético de um anel circular com corrente eléctrica

Escolhemos o plano XOY no plano do anel e o eixo Z para cima. A origem do referencial está no centro do anel (ver figura ao lado). No eixo Z, o campo magnético só pode ter direcção ao longo do Z (pela simetria). Limitamo-nos por calcular apenas o campo nos pontos do eixo Z. Isto é bastante fácil, pois só temos que calcular a componente z do campo. Qualquer elemento do anel produz um campo parcial, perpendicular ao vector $\vec{r}$ (ver figura ***a***) A sua componente z é:

$$dB_z = K_m \frac{Idl}{r^2}\cos\theta = \frac{Idl}{r^2}\left(\frac{b}{r}\right)$$

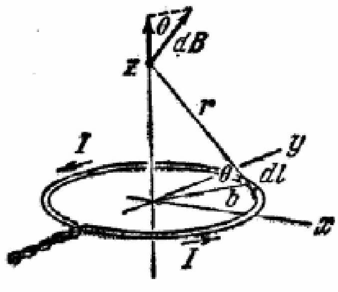
onde b é o raio do anel. Integrando sobre o anel, temos

$$B_z = K_m \frac{I}{r^3} b \cdot 2\pi b = K_m \frac{2\pi b^2 I}{\left(b^2 + z^2\right)^{3/2}} \qquad (138)$$

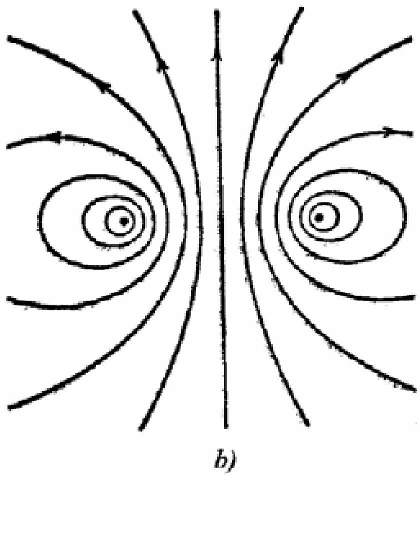
Então, o campo no centro do anel é igual a

$$B_z(z=0) = K_m \frac{2\pi I}{b} \qquad (138a)$$

e diminui com a distância como $\frac{1}{z^3}$. Para



a)



b)

distâncias muito grandes, $z >> b$, temos

$$B_z = K_m \frac{2IS}{z^3} \tag{138b}$$

Este campo tem o mesmo comportamento espacial que o campo eléctrico dum dipolo eléctrico. Introduz-se uma grandeza chamada momento magnético dipolar,

$$\vec{p}_m = \left(\frac{1}{c}\right) I\vec{S} \quad , \tag{139}$$

ou seja, o produto da intensidade de corrente no anel pela área dele $(\vec{S} = S\vec{n})$. (Note-se que o factor $\left(\frac{1}{c}\right)$ existe apenas no sistema CGS. É introduzido para que o momento magnético tenha a mesma dimensão que o momento dipolar eléctrico.) Então, o anel tem as propriedades de dipolo magnético. O seu campo varia segundo

$$B_z = \begin{cases} \dfrac{2p_m}{z^3} & \text{(CGS)} \\ \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{p_m}{z^3} & \text{(SI)} \end{cases}$$

no eixo Z. A figura ***b*** da página anterior mostra algumas linhas de campo para este campo magnético.

Pela analogia com o campo eléctrico (ver Sec.2.2) podemos adivinhar que um dipolo magnético que se encontra dentro de um campo magnético externo possui uma energia

$$U = -(\vec{p}_m \cdot \vec{B}) . \tag{140}$$

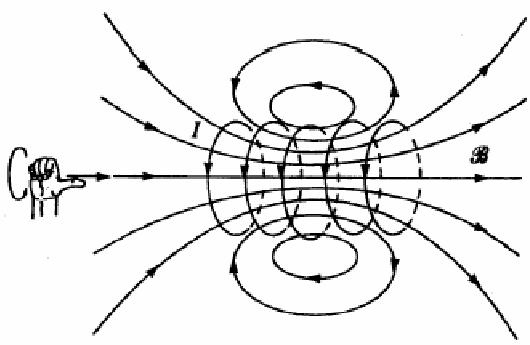
Claro, esta energia pode ser calculada analisando as forças que actuam sobre o dipolo por parte do campo magnético externo. O momento resultante destas forças é dado pela fórmula análoga à (20a),

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} .$$

Daqui concluímos que um campo magnético externo iria provocar uma rotação do dipolo magnético até este se alinhar com o campo. Nesta situação da energia mínima, o plano do anel é perpendicular ao vector do campo magnético.

3) O campo criado por n espiras e o campo dentro dum solenóide

Um solenóide é um fio metálico enrolado em hélice. Tem N espiras circulares, todas percorridas pela mesma corrente I. Também se usa o termo "bobina". A diferença é que uma bobina pode ter várias camadas de fio, enroladas uma por cima de outra.



Se as espiras de um solenóide ficam muito próximo uma de outra, sem intervalos, o campo magnético no interior do solenóide é uniforme e pode ser obtido integrando a Eq.(138) em ordem a z. Para um solenóide comprido, o resultado é:

$$B_z = K_m \cdot 4\pi nI ,$$

onde n é o número de espiras por unidade de comprimento.